Юные таланты 2019

Условия заданий по физике с решениями

8 класс

Задача № 1

Катер плывёт по реке из пункта *A* в пункт *B*, расстояние между которыми 9.75 км. Спустя 20 мин после старта с борта катера сбрасывают спасательный круг. Добравшись до пункта *B*, катер быстро развернулся и поплыл обратно. В пункт *A* катер прибыл одновременно с кругом. Найдите собственную скорость катера, если скорость течения реки 2 км/ч.

Решение

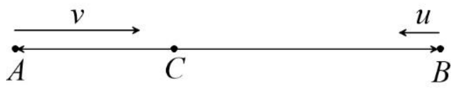

Рис. 1

Обозначим скорость течения реки u = 2 км/ч, время когда был выброшен круг t = 20 мин = 1/3 ч, расстояние между городами AB = 9.75 км. Искомую собственную скорость катера обозначим υ. Из условия задачи понятно, что река течёт от *B* к *A*, а круг выброшен до разворота катера. По пути от *A* к *B* скорость катера относительно берегов составляла υ - u, а после разворота $\upsilon + u$. Пусть круг был выброшен в точке *C*, тогда

$$AC = (\upsilon - u)t\,.$$

Полное время движения катера

$$t_0 = \frac{L}{\upsilon - u} + \frac{L}{\upsilon + u}\,.$$

С другой стороны за время $t_0 - t$ круг проплыл по течению от точки *C* до *A*.

$$t_0 - t = \frac{AC}{u}$$

После преобразований получаем

$$\frac{AB}{\upsilon - u} + \frac{AB}{\upsilon + u} = \frac{\upsilon}{u}t \;\Rightarrow\; 2AB\cdot u = t\left(\upsilon^2 - u^2\right) \;\Rightarrow\; \upsilon = \sqrt{\frac{2AB\cdot u}{t} + u^2}\,.$$

Подстановка числовых значений даёт υ = 11 км/ч. (5 баллов)

Задача № 2

Стальную деталь массой 2.0 кг, разогретую до 340 °C, опускают в сосуд с водой и *быстро* извлекают. При этом успевает выкипеть 50 г воды, а температура детали уменьшается до 150 °C. Сколько воды температурой 10 °C необходимо долить в сосуд, чтобы вернуть температуру воды в сосуде к её первоначальному значению 20 °C? Удельная теплоёмкость стали 0.46 кДж/кг·°C, воды – 4.2 кДж/кг·°C. Удельная теплота парообразования воды 2.3 МДж/кг. Теплоёмкостью сосуда и теплообменом с окружающей средой пренебречь.

Решение

Введём обозначения: m = 2.0 кг, Δm = 0.05 кг, t_0 = 20 °C t_1 = 340 °C, t_2 = 150 °C, t_5 = 10 °C, $c_s = 0.46\cdot10^3$ Дж/кг·°C, $c = 4.2\cdot10^3$ Дж/кг·°C, $L = 2.3\cdot10^6$ Дж/кг. Искомую массу воды, которую необходимо долить в сосуд, обозначим ΔM. Поскольку деталь находится в воде в течение короткого промежутка времени, в системе не успевает установиться тепловое равновесие. Вода, контактирующая с поверхностью детали, успевает разогреться до температуры кипения t_3 = 100 °C и выкипеть. Оставшийся объём жидкости успевает прогреться до некоторой температуры t_4 рис. 2. Уравнение теплового баланса имеет вид:

$$c_s m\left(t_1 - t_2\right) = \Delta m\left(c\left(t_3 - t_0\right) + L\right) + Q_3 \qquad (1)$$

где $Q_3 = cM\left(t_4 - t_0\right)$, M - масса оставшейся в сосуде воды.

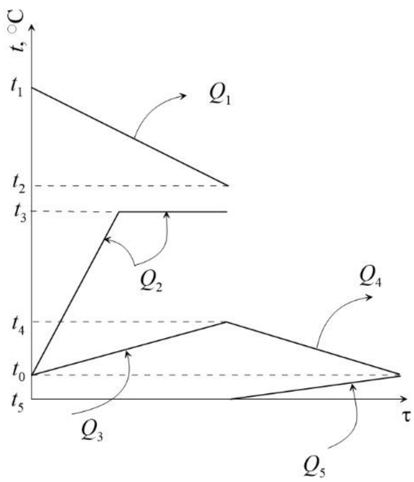

Рис. 2

После добавления в сосуд воды массой ΔM при температуре t_5 тепловое равновесие устанавливается при температуре t_0. Уравнение теплового баланса:

$$c\Delta M\left(t_0-t_5\right)=cM\left(t_4-t_0\right)=Q_3. \qquad (2)$$

Исключая Q_3 из (1) и (2) находим неизвестную массу

$$\Delta M=\frac{c_s m\left(t_1-t_2\right)-\Delta m\left(c\left(t_3-t_0\right)+L\right)}{c\left(t_0-t_5\right)}.$$

Подстановка числовых значений даёт $\Delta M \approx 1.0$ кг.

Критерии оценивания

- Записано (1) + 5 баллов.
- Записано (2) + 1 балл.
- Получен верный ответ + 4 балла.

Задача № 3

В системе, изображённой на рис. 3 а, поршни тонкие и невесомые, трения нет. Площадь поршней в левом цилиндре S_1 = 10 см^2, в правом – S_2 = 30 см^2. Цилиндры соединены трубками и заполнены бензином (ρ_1 = 710 кг/м^3) и водой (ρ_2 = 1000 кг/м^3). На левом верхнем поршне покоится груз массой m = 1 кг. На сколько и куда сдвинется каждый поршень, если на правый верхний поршень поставить такой же груз? Первоначально *верхние* поршни находились на одной высоте.

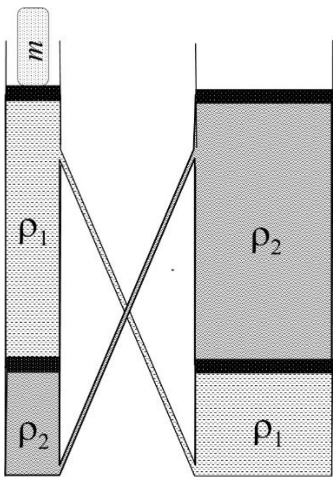

Рис. 3 а

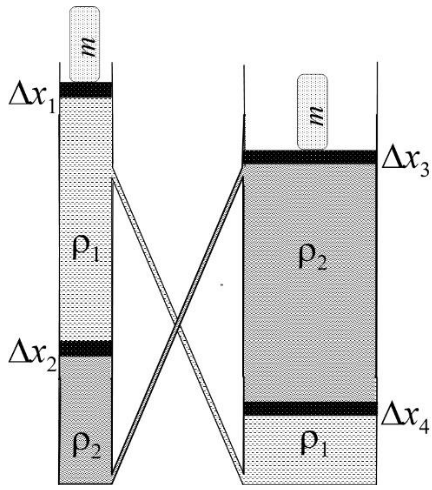

Рис. 3 б

Решение

Условием равновесия нижних поршней в обоих цилиндрах является равенство давлений на поршень жидкостей сверху и снизу. Пусть изначальное расстояние между поршнями в левом цилиндре равно a_1, а в правом a_2. Учитывая, что верхние поршни изначально находятся на одинаковой высоте, запишем условие равновесия нижнего левого поршня

$$\frac{mg}{S_1}+\rho_1 g a_1=\rho_2 g a_1.$$

Условие равновесия нижнего правого поршня

$$\rho_2 a_2 g=\rho_1 a_2 g+\frac{mg}{S_1}.$$

Оба равенства могут быть справедливы одновременно только если a_1 = a_2 = a. Нижние поршни так же изначально располагаются на одинаковой высоте, а расстояние между верхними и нижними поршнями

$$a=\frac{m}{S_1\left(\rho_2-\rho_1\right)}. \qquad (1)$$

После того, как на верхний правый поршень поместили груз массой m все поршни переместятся в новое положение равновесия. Обозначим смещения поршней как показано на рис. 3 б, при этом каждое смещение Δx будем считать положительным, если поршень перемещается вверх, отрицательным – вниз. Жидкости в данной задаче можно считать несжимаемыми, поэтому изменения объёмов жидкостей в первом цилиндре равны по модулю и противоположны по знаку изменениям объёмов в правом цилиндре.

$$\begin{cases} S_1\Delta x_2 = -S_2\left(\Delta x_3 - \Delta x_4\right) \\ S_2\Delta x_4 = -S_1\left(\Delta x_1 - \Delta x_2\right) \end{cases} \tag{2}$$

Условия равновесия нижних поршней соответственно для левого и правого цилиндров примут вид

$$\begin{cases} \dfrac{m}{S_1} + \rho_1\left(\Delta x_1 + a - \Delta x_2\right) = \dfrac{m}{S_2} + \rho_2\left(\Delta x_3 + a - \Delta x_2\right) \\ \dfrac{m}{S_2} + \rho_2\left(\Delta x_3 + a - \Delta x_4\right) = \dfrac{m}{S_1} + \rho_1\left(\Delta x_1 + a - \Delta x_4\right) \end{cases}. \tag{3}$$

Система уравнений (2) и (3) содержит в качестве неизвестных только искомые смещения поршней и может быть решена любым способом. Далее изложен один из возможных способов решения.

Уравнения (3) складываем, после приведения подобных получаем:

$$\rho_1\Delta x_2 + \rho_2\Delta x_4 = \rho_2\Delta x_2 + \rho_1\Delta x_4 \;\Rightarrow\; \Delta x_4 = \Delta x_2 .$$

Таким образом, нижние поршни сместятся на одинаковое расстояние. В уравнениях (2) заменим Δx_4 на Δx_2. Первое уравнение разделим на S_2, второе на S_1 и приведём подобные.

$$\begin{cases} \Delta x_3 = \left(1 - \dfrac{S_1}{S_2}\right)\Delta x_2 \\ \Delta x_1 = \left(1 - \dfrac{S_2}{S_1}\right)\Delta x_2 \end{cases} \tag{4}$$

Перегруппируем слагаемые в первом уравнении системы (3)

$$\frac{m}{S_1} + \rho_1\left(\Delta x_1 - \Delta x_2\right) = \frac{m}{S_2} + \left(\rho_2 - \rho_1\right)a + \rho_2\left(\Delta x_3 - \Delta x_2\right).$$

Подставим a из (1), а также заменим Δx_3 и Δx_1, после приведения подобных получаем:

$$\frac{m}{S_2} = \left(\rho_2\frac{S_1}{S_2} - \rho_1\frac{S_2}{S_1}\right)\Delta x_2 ,$$

Выражаем $\Delta x_2 = \Delta x_4$.

$$\Delta x_2 = \Delta x_4 = \frac{mS_1}{\rho_2 S_1^2 - \rho_1 S_2^2}$$

Для упрощения используем $S_2 = 3S_1$.

$$\Delta x_2 = \Delta x_4 = \frac{m}{S_1\left(\rho_2 - 9\rho_1\right)}, \qquad \Delta x_3 = \frac{2}{3}\Delta x_2, \qquad \Delta x_1 = -2\Delta x_2$$

Подстановка числовых значений даёт $\Delta x_1 \approx 0.37$ м, $\Delta x_2 = \Delta x_4 \approx -0.19$ м, $\Delta x_3 \approx -0.12$ м.

Критерии оценивания

- Установлено, что изначально нижние поршни находятся на одной высоте + 2 балла.
- Использована несжимаемость жидкостей, получено (2) + 2 балла.
- Записано условие равновесия (3) + 2 балла.
- Получены верные ответы + 4 балла.

Задача № 4

На дне герметичного сосуда, заполненного воздухом при атмосферном давлении $p_0 = 1$ атм находится несжимаемый маленький шарик, средняя плотность которого 50 кг/м^3. К сосуду присоединён воздушный насос. Производительность насоса q – величина, показывающая какую массу воздуха перекачивает насос в единицу времени. Дана зависимость величины обратной производительности от избыточного давления в сосуде. Насос включают, и спустя 21 с избыточное давление в сосуде достигает 10 атм. Через какое время после включения насоса шарик оторвётся от дна сосуда? Связь плотности воздуха ρ с его давлением p вполне корректно описывается соотношением $p = \alpha\rho$, где $\alpha \approx 0.86$ атм·м^3/кг. *Примечание*: под избыточным давлением следует понимать разность давления в сосуде и атмосферного давления.

Решение

Введём обозначения: t_1 = 21 с, ρ^* = 50 кг/м^3, Δp_1 = 10 атм. Неизвестный объём сосуда V, искомое время t_2. Увеличение давления в сосуде на величину Δp связано с соответствующим увеличением плотности воздуха в нём.

$$\Delta p = \alpha \Delta \rho \qquad (1)$$

Умножим обе части равенства на V и разделим на α.

$$\frac{\Delta p V}{\alpha} = \Delta \rho V = \Delta m$$

Масса воздуха, закачанного в сосуд выражена через изменение давления в нём. Размерность площади под графиком $\frac{1}{q}(\Delta p)$ – $\frac{\text{с} \cdot \text{атм}}{\text{г}}$. Если умножить эту площадь на $\frac{V}{\alpha}$, то её размерность составит $\frac{\text{с} \cdot \text{атм}}{\text{г}} \cdot \frac{\text{кг}}{\text{атм}} = 1000 \cdot \text{с}$, то есть размерность времени. Таким образом, площадь под графиком $\frac{1}{q}(\Delta p)$ прямо

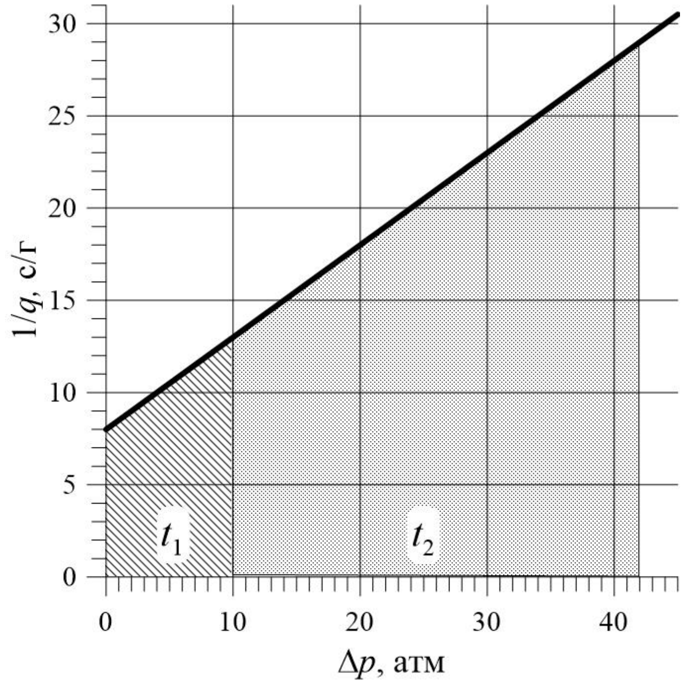

Рис. 4

пропорциональна времени, необходимому для повышения давления в сосуде на величину Δp. Выразим время t_1 (фигура, ограниченная графиком, – трапеция).

$$t_1 = \frac{V}{\alpha} \cdot \frac{\left(\frac{1}{q}(0) + \frac{1}{q}(\Delta p_1)\right)\Delta p_1}{2} \qquad (2)$$

Условием отрыва шарика от дна сосуда является равенство силы тяжести силе Архимеда $\rho^* v g = \rho v g$, где v – объём шарика, g – ускорение свободного падения. Поскольку шарик несжимаем

$$\rho^* = \rho . \qquad (3)$$

Избыточное давление в сосуде при этом составит $\Delta p_2 = \alpha \rho^* - p_0$. Искомое время вычисляем аналогично с (2).

$$t_2 = \frac{V}{2\alpha}\left(\frac{1}{q}(0) + \frac{1}{q}(\Delta p_2)\right)\Delta p_2 \qquad (4)$$

Исключая неизвестный объём из (2) и (4) получаем:

$$t_2 = t_1 \frac{\alpha \rho^* - p_0}{\Delta p_1} \cdot \frac{\left(\frac{1}{q}(0) + \frac{1}{q}(\alpha \rho^* - p_0)\right)}{\left(\frac{1}{q}(0) + \frac{1}{q}(\Delta p_1)\right)} .$$

Подстановка числовых значений даёт t_2 = 155.4 с ≈ 2.6 мин.

Критерии оценивания

- Получено (1) + 1 балл.
- Установлена связь площади под графиком $1/q(\Delta p)$ и времени. + 6 баллов.
- Получено (2) + 2 балла.
- Получено (3) + 2 балла.
- Получен верный ответ + 4 балла.

9 класс

Задача № 1

На поверхности барабана радиусом R = 0.5 м при помощи электромагнита удерживается маленький стальной шарик. Из первоначального положения (рис. 5) барабан начинает раскручиваться с угловым ускорением ε = 20 с$^{-2}$. Через какое *минимальное* время необходимо отключить электромагнит, чтобы шарик подлетел вертикально на высоту не меньше H = 10 м, отсчитанной от оси барабана? Считать, что электромагнит способен удержать шарик при любой скорости вращения барабана, а при выключении его поле исчезает мгновенно. Ускорение свободного падения g = 10 м/с^2.

Решение

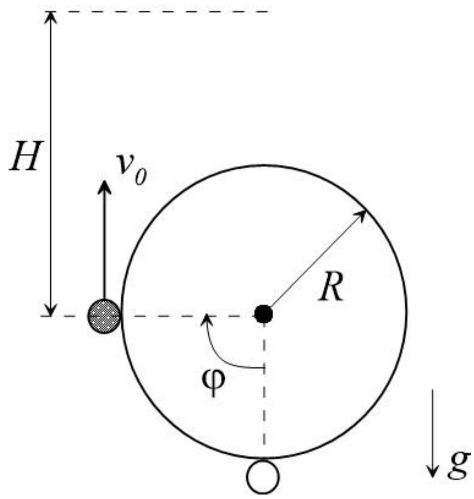

Рис. 5

Магнит необходимо выключить в момент, когда скорость шарика направлена вертикально. При этом барабан повернётся на угол (рис. 5)

$$\varphi = 2\pi N + \frac{\pi}{2}, \qquad (1)$$

где N - число полных оборотов барабана. С другой стороны, угол можно выразить через искомое время t и угловое ускорение.

$$\varphi = \frac{\varepsilon t^2}{2} \qquad (2)$$

Обозначим скорость отрыва шарика от барабана υ_0. Используем закон сохранения механической энергии (m – масса шарика)

$$\frac{m\upsilon_0^2}{2} = mgH \Rightarrow \upsilon_0 = \sqrt{2gH}\,.$$

С другой стороны, скорость отрыва шарика выражается через угловое ускорение.

$$\upsilon_0 = \varepsilon R t$$

Из трёх последних равенств получаем

$$\varphi = \frac{gH}{\varepsilon R^2}\,. \qquad (3)$$

Подставив (3) в (1) найдём необходимое число оборотов.

$$N \ge \frac{2gH - \pi\varepsilon R^2}{4\pi\varepsilon R^2}$$

Наименьшее натуральное число, удовлетворяющее этому неравенству N = 3. Приравнивая (2) и (1), находим искомое время

$$t = \sqrt{\frac{4\pi N + \pi}{\varepsilon}} = \sqrt{\frac{13\pi}{\varepsilon}}\,.$$

Подстановка числовых значений даёт $t \approx 1.4$ с.

Критерии оценивания

- Записано (1) + 2 балла.
- Получено (3) + 3 балла.
- Получен верный ответ + 5 баллов.

Задача № 3

Включённая напрямую в сеть лампа потребляет мощность 80 Вт. На включённом в сеть последовательно с лампой резисторе рассеивается мощность 15 Вт. Какая мощность будет рассеиваться на этом резисторе, если лампу заменить на другую, потребляющую при непосредственном включении в сеть 120 Вт? Сопротивления всех элементов и напряжение сети считать постоянными.

Решение

Введём обозначения P = 80 Вт, p = 15 Вт, P_1 = 120 Вт. Неизвестные сопротивления первой лампы, второй лампы и резистора обозначим соответственно R, R_1, r, напряжение сети U, искомая мощность p_1. Мощность первой лампы $P = U^2/R$. Когда к ней последовательно подключили резистор, сила тока в цепи составила $I = U/(R+r)$, а мощность рассеиваемая на резисторе

$$p = I^2 r \;\Rightarrow\; p = \frac{PRr}{(R+r)^2}. \qquad (1)$$

Мощность второй лампы $P_1 = U^2/R_1$. Выражая U^2 через P и R, получаем $R_1 = PR/P_1$. При последовательном подключении второй лампы с резистором в сеть, на нём будет рассеиваться мощность

$$p_1 = \frac{P_1 R_1 r}{(R_1+r)^2} \;\Rightarrow\; p_1 = \frac{PRr}{\left(\frac{P}{P_1}R + r\right)^2}. \qquad (2)$$

Разделим числитель и знаменатель в (1) на R^2 и введём новую переменную $x = r/R$. Тогда (1) принимает вид:

$$p = \frac{Px}{(1+x)^2} \;\Rightarrow\; x^2 + \left(2 - \frac{P}{p}\right)x + 1 = 0 \;\Rightarrow\; x = \frac{P}{2p} - 1 \pm \sqrt{\left(\frac{P}{2p}\right)^2 - \frac{P}{p}}.$$

Подстановка $P/p = 16/3$ даёт $x = (5 \pm 4)/3$. Меньший корень соответствует случаю, когда сопротивление резистора меньше сопротивления лампы, бо̀льший – обратной ситуации. Разделив числитель и знаменатель в (2) на R^2 получаем:

$$p_1 = \frac{Px}{\left(\frac{P}{P_1} + x\right)^2}.$$

Подстановка числовых значений даёт $p_1^{(1)} = 80/3$ Вт ≈ 27 Вт, $p_1^{(2)} = 2160/121$ Вт ≈ 17.9 Вт.

Критерии оценивания

- Получено (1) + 2 балла.
- Получено (2) + 2 балла.
- Решено квадратное уравнение + 4 балла.
- Получен верный ответ + 2 балла.

Задачи № 2 и № 4 совпадают с задачами для 8 класса.

Критерии оценивания задачи № 4, применительно к 9 классам

- Установлена связь площади под графиком $1/q(\Delta p)$ и времени. + 5 баллов.
- Получено (2) + 2 балла.
- Получен верный ответ + 3 балла.